

Avvertenza

Questa dispensa costituisce la nuova esposizione del § 4420 del quarto capitolo che sarà contenuta nella seconda edizione in preparazione della *Introduzione alla filosofia della scienza. Un approccio storico ai concetti fondamentali* (1a ed. Bonanno, Catania 2004) che viene messo on line ad esclusivo uso didattico per gli studenti che seguono il corso facente uso della prima edizione, in modo che essi possano fruire delle migliorie in esso contenuto. In carattere blu sono indicate le novità rispetto alla prima edizione. Per ogni ulteriore suggerimento o eventuali correzioni scrivere a f.coniglione@unict.it.

© Francesco Coniglione

4420. Il programma bayesiano – Si era precedentemente accennato a Thomas Bayes (v. § 444), i cui seguaci sono di solito definiti come bayesiani. Costoro si trovano in genere tra coloro che sostengono l'approccio soggettivista (come ad es. il già menzionato Savage), anche se vi sono stati dei logicisti che hanno cercato di servirsi del teorema di Bayes. Si tratta di un approccio diversificato, con molte sfaccettature, che ha dato luogo ad una molteplicità di programmi di ricerca, tutti però centrati intorno all'importanza rivestita dal teorema di Bayes per risolvere i problemi legati al calcolo delle probabilità, lasciati irrisolti dagli altri approcci.

L'idea che sta alla base del bayesianismo riposa sul fatto che la fiducia nutrita in un dato momento da un soggetto per una credenza possa aumentare (o diminuire) in seguito ad una valutazione razionale dei nuovi dati che egli può successivamente acquisire. Lo scopo del teorema è stabilire in che misura una certa evidenza osservativa E possa far crescere (o decrescere) la probabilità *a priori* o iniziale $p(H)$ (ovvero il grado soggettivo di credenza) che un certo ricercatore assegna ad una certa ipotesi scientifica, ottenendo così la probabilità di H in base all'esperienza E , cioè $p(H/E)$, detta anche probabilità *a posteriori*. Può essere così proposto su basi quantitative il cosiddetto *criterio di rilevanza della conferma*, secondo il quale una data evidenza osservativa E conferma una certa ipotesi H se e solo se $p(H/E)$ è maggiore di $p(H)$; e tanto più la conferma quanto più E aumenta la probabilità di H . Nel caso contrario – cioè quando accada che $p(H/E) < p(H)$ – si avrebbe una sconfirma. Ciò darebbe la possibilità di affrontare in modo efficace quel problema della conferma che – come vedremo nel prossimo paragrafo (v. §§ 451-454) – sarà uno dei principali argomenti di dibattito e di difficoltà della filosofia della scienza degli anni '50 e '60.

Senza scendere nei dettagli tecnici, possiamo affermare che il problema fondamentale di questo approccio consiste nello stabilire il modo in cui il soggetto che applica il teorema viene in possesso della probabilità iniziale $p(H)$ (concernente fenomeni a lui già noti e che costituiscono la base di partenza per il calcolo della probabilità di quelli a cui è interessato). Non sembra vi sia altro modo se non ricorrere ad una valutazione soggettiva, alle cosiddette "probabilità personali": il teorema di Bayes, infatti, non dice nulla sul modo in cui il soggetto è arrivato ad accordare determinate probabilità iniziali ad una ipotesi; assicura solo che, a partire da queste, possiamo matematicamente calcolare la probabilità di qualunque fenomeno ad esse connesso.

4421. Il teorema di Bayes – Il teorema (o formula) di Bayes nasce da un quesito: se si è verificato l'evento E_1 , qual è la probabilità che il suo accadere sia stato causato da un altro evento E_2 ? Detto in altri termini, voglio sapere quale sia la probabilità che un certo evento sia stata la causa C di un altro evento E che si è verificato, ovvero voglio conoscere la probabilità di C per l'evento E . Il che si scrive $p(C/E)$

Il teorema dice che:

$$p(C/E) = \frac{p(C) \times p(E/C)}{p(E)}$$

Nel caso in cui le cause fossero più di una (mettiamo C_1 , C_2 e C_3), allora la probabilità che a causare E sia stata ad esempio la causa C_2 è data dalla formula più generale:

Tale formula può ovviamente essere generalizzata a n cause. Tenendo presenti le formule prima

$$p(C_2/E) = \frac{p(C_2) \times p(E/C_2)}{[p(C_1) \times p(E/C_1)] \times [p(C_2) \times p(E/C_2)] \times [p(C_3) \times p(E/C_3)]}$$

date, facciamo un esempio. Abbiamo due scatole; in quella A ci sono 30 biglie rosse e 15 nere; nella B ci sono 20 biglie rosse e 30 nere. Mi viene consegnata una biglia rossa senza che mi venga detto da quale scatola essa sia stata estratta. Mi domando allora: che probabilità v' è che essa sia stata estratta dalla scatola A ? Ovvero, che la causa dell'evento E = "biglia rossa" sia la "scatola A "? I dati sono i seguenti:

- Visto che le scatole hanno la stessa probabilità iniziale di essere quelle da cui è stata estratta la biglia rossa, allora avremo che:

$$p(C_A) = p(C_B) = 1/2,$$

dove con $p(C_A)$ abbiamo indicato la probabilità iniziale che la causa dell'evento E sia la scatola A . Lo stesso vale per $p(C_B)$.

- La probabilità che dalla scatola A venga estratta una biglia rossa è data da:

$$p(E/C_A) = 30/45 = 2/3$$

- La probabilità che dalla scatola B venga estratta una biglia rossa è data da:

$$p(E/C_B) = 20/50 = 2/5$$

Ora possiamo applicare la formula di Bayes riferita alle due possibili cause (C_A e C_B) e avremo:

$$p(C_A/E) = \frac{p(C_A) \times p(E/C_A)}{[p(C_A) \times p(E/C_A)] \times [p(C_B) \times p(E/C_B)]}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right)} = 8$$

Effettuando le opportune sostituzioni otteniamo quanto voluto:

Questa è la probabilità che la biglia rossa sia stata estratta dalla scatola A , ovvero che la causa dell'evento E sia stata la C_A .

Trasferendo questo teorema nel campo delle scienze naturali, esso può essere inteso come atto a fornire la probabilità di una certa ipotesi H , una volta data una certa evidenza empirica E . In questo caso indichiamo con

- $p(H/E \wedge K)$ la probabilità dell'ipotesi H in base all'esperienza E ed alla conoscenza già posseduta K (la "conoscenza di sfondo"). Essa è la cosiddetta probabilità *a posteriori* della quale siamo in cerca e che vogliamo calcolare; E rappresenta l'insieme di nuovi dati dei quali si tiene conto per modificare i gradi di credenza anteriormente nutriti verso l'ipotesi H .

- $p(E/H)$ la probabilità che si verifichi l'evento E se è vera l'ipotesi H ; è la cosiddetta "verosimiglianza";

- $p(H/K)$ la probabilità a priori o iniziale dell'ipotesi H , ovvero la credenza soggettiva che un dato individuo ha verso l'ipotesi H , indipendentemente dal fatto che si sia verificato o meno E , e cioè basandosi solo sulla conoscenza K già posseduta.

- $p(E/K)$ la probabilità iniziale dell'evento E , ovvero la credenza (o anche aspettativa) che un soggetto razionale ha che accada E senza fare alcuna ipotesi H e basandosi solo sulla conoscenza già posseduta K .

Il teorema si scrive nel seguente modo: Il suo significato può essere più facilmente inteso mediante un esempio.¹ Immaginiamo che uno scienziato sia in possesso di conoscenze astronomiche per cui crede che esista un sistema solare quasi identico al nostro e i cui movimenti obbediscono alle stesse leggi, con la sola differenza di avere otto pianeti anziché nove. Indichiamo con K l'insieme delle conoscenze astronomiche possedute dal nostro scienziato. Ora supponiamo che gli sia possibile fare delle osservazioni che gli forniscono dei dati E che mostrano come il pianeta più lontano dal sole abbia una traiettoria differente da quella predetta in base alla conoscenza K posseduta. Per spiegare ciò lo scienziato è portato a formulare l'ipotesi H che esista un nono pianeta. Riportiamo questa situazione nei termini del teorema di Bayes. Il nostro scienziato valuterà la probabilità iniziale $p(H/K)$ dell'ipotesi che vi sia un nuovo pianeta sulla base della conoscenza posseduta anteriormente ad aver osservato E

¹ Traggo l'esempio da A. Barberousse, M. Kistler, P. Ludwig, *La philosophie des sciences au XX^e siècle*, Flammarion, Manchecourt 2000, pp. 74-6.

$$p(H/E \wedge K) = \frac{p(H/K) \times p(E/H)}{p(E/K)}$$

(ovvero l'anomalia nella traiettoria del pianeta più lontano dal sole); e siccome nulla lo porta a credere che vi sia un nuovo pianeta, egli attribuirà a tale ipotesi una probabilità inferiore alla metà, ovvero la riterrà alquanto improbabile, anche se non potrà in linea di principio escluderla; diciamo che sia $p(H/K)=0,4$. In seguito, egli valuterà le probabilità $p(E/K)$ dei nuovi dati osservati (l'anomalia della traiettoria) sulla base della conoscenza posseduta; e siccome le conoscenze K non presentano alcuna controindicazione affinché accada E , allora egli potrà attribuire un valore di 0,5 a $p(E/K)$. Ancora, lo scienziato attribuirà un valore elevato alla probabilità $p(E/H)$, in quanto ha ipotizzato l'ipotesi H appunto per spiegare le osservazioni E , per cui poniamo sia $p(E/H)= 0,95$. Ora sostituiamo questi valori

$$p(H/E \wedge K) = \frac{0,4 \times 0,95}{0,5} = 0,76$$

nella formula di Bayes ed otterremo:

Come si vede l'ipotesi dell'esistenza di un nuovo pianeta ha un grado di conferma superiore a seguito dell'esperienza nuova E rispetto a quanto ne avesse precedentemente, sulla base della semplice conoscenza posseduta K . Ciò significa che la nuova evidenza ha fatto aumentare il grado di credenza dello scienziato nell'ipotesi rispetto a quanto ne aveva precedentemente, per cui la credenza *a posteriori* è superiore rispetto a quella *a priori*. Possiamo dire pertanto che i dati empirici confermano una certa ipotesi se è rispettata la seguente disequaglianza:

$$p(H/E \wedge K) > p(H/K)$$

In sostanza il teorema di Bayes ci dice che una certa ipotesi è confermata dai dati sperimentali se questi ultimi sono più probabili una volta che sia data l'ipotesi piuttosto che in sua assenza, di modo che la probabilità *a posteriori* (ovvero il grado di conferma o di credenza soggettiva) è superiore alla probabilità *a priori*. Nel caso in cui avvenga che $p(E/H)=1$ (cioè che i dati empirici siano certi una volta data l'ipotesi), allora è ovvio che H implica deduttivamente E . Inoltre, quando accade che ci imbattiamo in dati inattesi (e quindi molto improbabili), essendo il $p(E/K)$ molto basso, allora questi dati confermano l'ipotesi molto meglio rispetto ad altri che invece tutto sommato ci si aspettava di trovare, per cui in sostanza $p(H/E \wedge K)$ dipende da $p(E/K)$, cioè dalla probabilità dei dati empirici indipendentemente dall'ipotesi formulata.